

5.3 Auflagerkraft

5.3.1 Balken auf zwei Stützen

Der Träger in Bild 5.12 drückt mit seiner (nicht dargestellten) Belastung und seiner Eigenlast auf die beiden Mauern, auf denen er ruht. Er ruft dadurch die beiden *Auflagerkräfte* A und B hervor.

Die *Eigenlast* des Trägers verteilt sich gleichmäßig auf die beiden Auflager; jedes nimmt die Hälfte davon auf.

Eine *mittige Belastung* wird ebenfalls je zur Hälfte von den beiden Auflagern aufgenommen; wir erhalten dann gleichgroße Auflagerkräfte.

Bei *ausmittiger Belastung* des Trägers muss jedoch das der Last näherliegende Auflager einen größeren Anteil der Last übernehmen als das entfernter liegende. Die Auflagerkräfte werden dann ungleich.

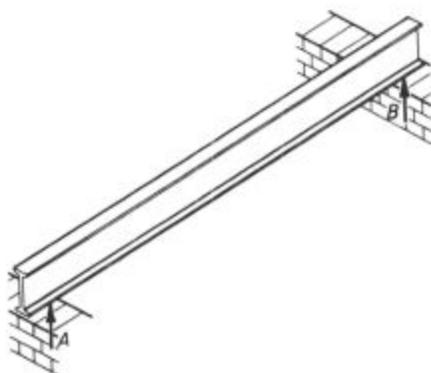


Bild 5.12
Auflagerkräfte eines Trägers

Auflagerkräfte lassen sich wie die Gleichgewichtskräfte von einseitigen Hebeln mit dem Hebelgesetz berechnen.

Im folgenden Beispiel und in den Übungen bleiben die vergleichsweise geringen Trägereigenlasten der Einfachheit halber unberücksichtigt.

Beispiel 26

Für den Träger nach Bild 5.13 sind die Auflagerkräfte A und B zu berechnen.

$$F_1 = 6 \text{ kN}, F_2 = 5 \text{ kN}.$$

Für die Berechnung der Auflagerkraft A wird der Träger als einseitiger Hebel angesehen, dessen Drehpunkt in B liegt. Dann ist nach dem Hebelgesetz

$$A \cdot 4,00 \text{ m} = F_1 \cdot 2,50 \text{ m} + F_2 \cdot 0,60 \text{ m}.$$

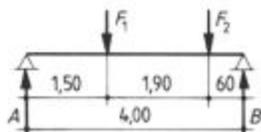


Bild 5.13

Berechnung der Auflagerkräfte eines Trägers auf zwei Stützen mit Einzellasten

Löst man die Gleichung nach A auf und setzt die Werte für F_1 und F_2 ein, ergibt sich

$$A = \frac{6 \text{ kN} \cdot 2,50 \text{ m} + 5 \text{ kN} \cdot 0,60 \text{ m}}{4,00 \text{ m}}$$

$$A = \frac{15 \text{ kNm} + 3 \text{ kNm}}{4,00 \text{ m}} = \frac{18 \text{ kNm}}{4,00 \text{ m}} = 4,5 \text{ kN}$$

Für die Berechnung der Auflagerkraft B denkt man sich nun den Drehpunkt in A . Jetzt ist nach dem Hebelgesetz

$$B \cdot 4,00 \text{ m} = F_1 \cdot 1,50 \text{ m} + F_2 \cdot 3,40 \text{ m}$$

$$B = \frac{6 \text{ kN} \cdot 1,50 \text{ m} + 5 \text{ kN} \cdot 3,40 \text{ m}}{4,00 \text{ m}}$$

$$B = \frac{9 \text{ kNm} + 17 \text{ kNm}}{4,00 \text{ m}} = \frac{26 \text{ kNm}}{4,00 \text{ m}} = 6,50 \text{ kN}$$

Nun schalten wir folgende Überlegung ein: Tragen zwei Männer an einer Stange eine oder mehrere Lasten, müssen beide zusammen die gesamte Last tragen. Die Last, die jeder zu tragen hat, entspricht den Auflagerkräften A oder B .

Die beiden Auflagerkräfte A und B müssen zusammen ebenso groß sein wie die Summe der Kräfte, die die Auflager aufzunehmen haben.

Wir erinnern uns an den Gleichgewichtsgrundsatz: Die Summe aller vertikalen Kräfte muss 0 sein: $\Sigma V = 0$.

Man kann damit die Richtigkeit der im Beispiel durchgeführten Berechnung leicht nachprüfen:

Auflagerkräfte $A + B = F_1 + F_2$ oder $A + B - (F_1 + F_2) = 0$

$$A + B = 4,50 \text{ kN} + 6,50 \text{ kN} = 11 \text{ kN}$$

$$F_1 + F_2 = 6 \text{ kN} + 5 \text{ kN} = 11 \text{ kN}$$

Übung 28 Für die Träger in Bild 5.14a bis f sind die Auflagerkräfte A und B zu berechnen.

Frage: Muss man die Auflagerkräfte der Träger c bis f mit dem Hebelgesetz berechnen, oder ist es möglich, sie durch einfache Überlegungen zu bestimmen?

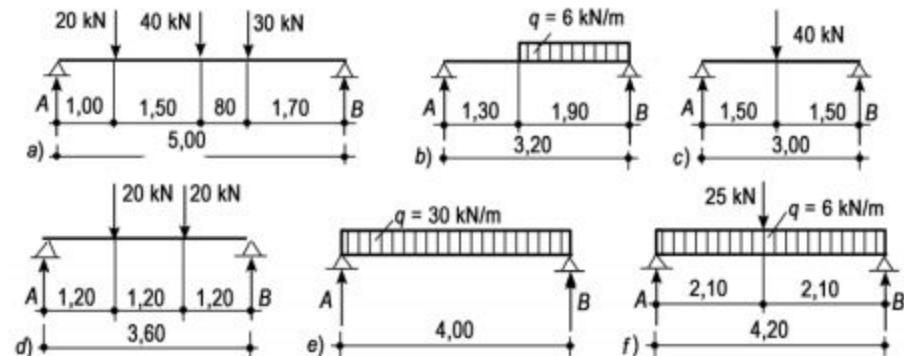


Bild 5.14 Balken auf zwei Stützen mit Einzellasten, Streckenlasten und gemischter Belastung

Übung 29 Eine Laderampe von 3,00 m Breite wird am vorderen Rand durch zwei I 200 mit 5,00 m Stützweite abgefangen (Bild 5.15). Sie ruhen auf 2,50 m hohen Mauerpfeilern aus Vollziegeln Mz 12 in Mörtelgruppe II.

Prüfen Sie, ob Pfeilerquerschnitte von $24 \text{ cm} \times 24 \text{ cm}$ ausreichen. Beachten Sie: Außer den Eigenlasten übernehmen die Träger die Streckenlast der linken Rampenhälfte. Vergessen Sie nicht die Pfeilereigenlast (mit $\gamma = 15 \text{ kN/m}^3$).

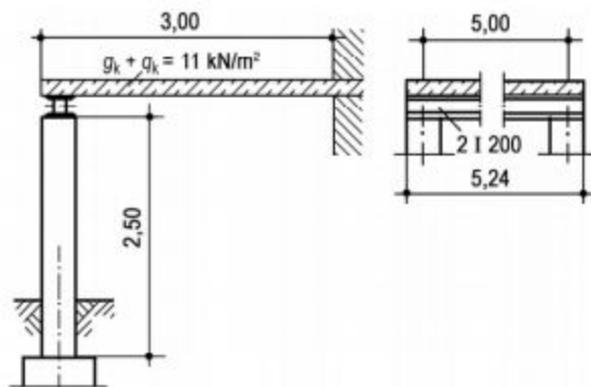


Bild 5.15

5.3.2 Balken mit gemischter Belastung

Der Deckenträger in Bild 5.16 hat verschiedene Lasten aufzunehmen. Er ist durch die Eigenlast der Decke und seine Eigenlast gleichmäßig belastet. Die belastete Stahlstütze ist als Einzellast, die aufzunehmende Querwand als Streckenlast zu betrachten.

Unterschiedliche Lastarten und -Stellungen nennt man „gemischte Belastung“.

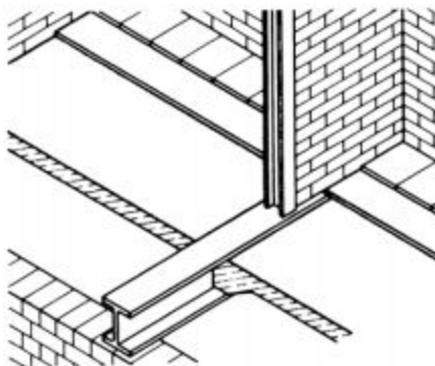


Bild 5.16

Der Deckenträger hat verschiedene Lasten aufzunehmen (Platte teilweise fortgelassen)

Beispiele zeigt Bild 5.17

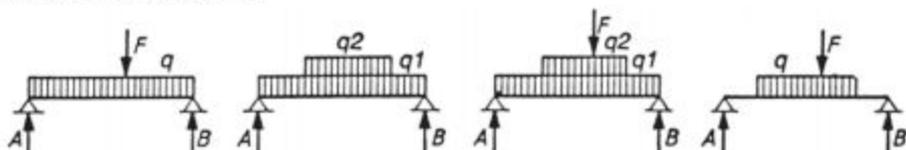


Bild 5.17 Möglichkeiten gemischter Belastung aus gleichmäßig und ungleichmäßig verteilten Streckenlasten und Einzellasten

Aus gemischten Lasten entstehende Auflagerkräfte werden nach den gleichen Regeln berechnet wie die Träger in Kapitel 5.3.1.

Beispiel 27

Für den Balken in Bild 5.18a sind die Auflagerkräfte zu berechnen. $F = 30 \text{ kN}$, $q = 5 \text{ kN/m}$. Am Einfachsten ermittelt man zunächst A_1 und B_1 für einen Balken, der nur mit q belastet ist (Bild 5.18b). Danach berechnet man A_2 und B_2 für einen nur mit F belasteten Balken (Bild 5.18c). Die Summe der Auflagerkräfte $A_1 + A_2$ ergibt dann für den mit F und q belasteten Balken (Bild 5.18a) den Auflagerdruck A . Ebenso ist für diesen Balken $B_1 + B_2 = B$.

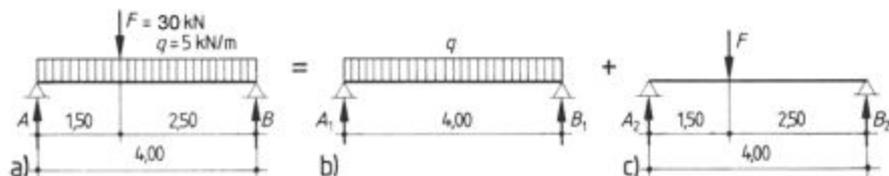


Bild 5.18 Träger auf zwei Stützen mit gemischter Last
a) gemischte Belastung, b) Lastfall q , c) Lastfall F

Bei gemischter Belastung ist es oft zweckmäßig, die Auflagerkräfte aus der Summe der für jeden Lastfall getrennt ermittelten Auflagerkräfte zu berechnen.

Für die Belastung durch q (Bild 5.18b) ist

$$A_1 = B_1 = \frac{5 \text{ kN/m} \cdot 4,00 \text{ m}}{2} = 10 \text{ kN}$$

Für die Belastung durch F (Bild 5.18c) sind nach dem Hebelgesetz

$$A_2 = \frac{30 \text{ kN} \cdot 2,50 \text{ m}}{4,00 \text{ m}} = 18,75 \text{ kN}$$

$$B_2 = \frac{30 \text{ kN} \cdot 1,50 \text{ m}}{4,00 \text{ m}} = 11,25 \text{ kN}$$

Die Gesamtauflegerkräfte sind also

$$A = A_1 + A_2 = 10 \text{ kN} + 18,75 \text{ kN} = \mathbf{28,75 \text{ kN}}$$

$$B = B_1 + B_2 = 10 \text{ kN} + 11,25 \text{ kN} = \mathbf{21,25 \text{ kN}}.$$

Probe: $\Sigma V = 0$

$$A + B = 28,75 \text{ kN} + 21,25 \text{ kN} = 50 \text{ kN}$$

$$F + F_q = 30 \text{ kN} + 5 \text{ kN/m} \cdot 4,00 \text{ m}$$

$$F + F_q = 30 \text{ kN} + 20 \text{ kN} = 50 \text{ kN} \quad \text{somit} \quad A + B - (F + F_q) = 0$$

Beispiel 28

Für den Träger nach Bild 5.19a sind die Auflagerkräfte zu berechnen.

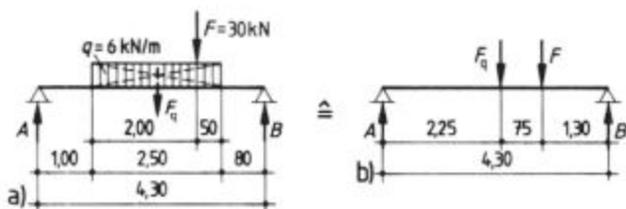


Bild 5.19

Balken auf zwei Stützen. Zum Berechnen von A und B darf die Streckenlast q in a) durch eine gleichgroße Einzellast F_q in b) ersetzt werden.

Hier bietet eine Teilung der Belastung wie in Beispiel 27 keine Vorteile, weil keine symmetrische Laststellung vorliegt. Das Hebelgesetz führt hier am Schnellsten zum Ziel.

Zunächst wird die Gesamtgröße der Streckenlast ermittelt. Es ist

$$F_q = q \cdot 2,50 \text{ m} = 6 \text{ kN/m} \cdot 2,50 \text{ m} = 15 \text{ kN}. \text{ Wir wissen bereits:}$$

Eine Streckenlast ist durch ihre Gesamtlast F_q im Lastschwerpunkt ersetzbar.

Jetzt ergibt sich für die Berechnung von A und B die Anordnung nach Bild 5.19b. Nach dem Hebelgesetz sind

$$A = \frac{F_q \cdot 2,05 \text{ m} + F \cdot 1,30 \text{ m}}{4,30 \text{ m}} = \frac{15 \text{ kN} \cdot 2,05 \text{ m} + 30 \text{ kN} \cdot 1,30 \text{ m}}{4,30 \text{ m}}$$

$$A = \frac{30,80 \text{ kNm} + 39 \text{ kNm}}{4,30 \text{ m}} = \frac{69,80 \text{ kNm}}{4,30 \text{ m}} = \mathbf{16,20 \text{ kN}}$$

$$B = \frac{F_q \cdot 2,25 \text{ m} + F \cdot 3,00 \text{ m}}{4,30 \text{ m}} = \frac{15 \text{ kN} \cdot 2,25 \text{ m} + 30 \text{ kN} \cdot 3,00 \text{ m}}{4,30 \text{ m}}$$

$$B = \frac{33,80 \text{ kNm} + 90 \text{ kNm}}{4,30 \text{ m}} = \frac{123,80 \text{ kNm}}{4,30 \text{ m}} = \mathbf{28,80 \text{ kN}}.$$

Probe: $A + B - (F_q + F) = \Sigma V = 0$

$$A + B = 16,20 \text{ kN} + 28,80 \text{ kN} = 45,00 \text{ kN}$$

$$F_q + F = 15,00 \text{ kN} + 30,00 \text{ kN} = 45,00 \text{ kN}$$

Übung 30 Für die Träger nach Bild 5.20a bis c sind die Auflagerkräfte zu berechnen.

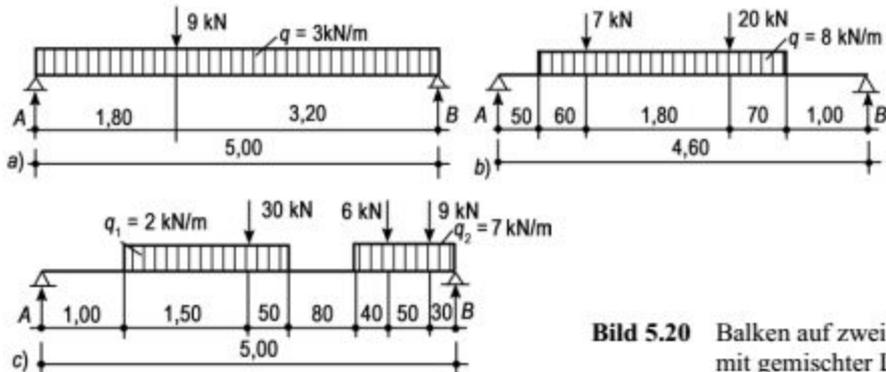


Bild 5.20 Balken auf zwei Stützen mit gemischter Last

5.3.3 Kragbalken

Häufig führt der Träger oder Balken einer Decke über einen der Auflagerpunkte hinaus – er kragt aus (Bild 5.21).

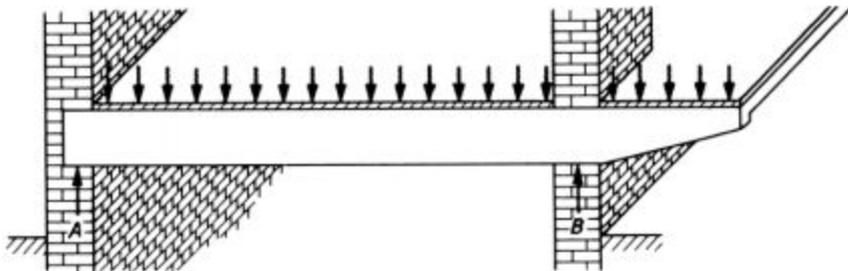


Bild 5.21 Der Stahlbetonbalken unter Decke und Laderampe ist ein Balken mit Kragarm.

Auch Auflagerkräfte von Kragbalken werden mit dem Hebelgesetz berechnet.

Wiederum betrachtet man den Balken als Hebel, dessen Drehpunkt einmal in B , das andere Mal in A angenommen wird. Mit dem Drehpunkt in A ergibt sich wieder ein einseitiger Hebel. Der Rechnungsgang ist uns bekannt; es ist lediglich darauf zu achten, dass die Länge des Hebelarms der Kraglast richtig eingesetzt wird. Mit dem Drehpunkt in B (bei der Berechnung von A) entsteht jedoch ein zweiseitiger Hebel, und wir müssen uns für die Rechnung darüber klar werden, welche der belastenden Kräfte rechts drehende und welche links drehende Momente erzeugen.

Beispiel 29

Für den Träger mit Kragarm nach Bild 5.22 sind die Auflagerkräfte zu ermitteln.

Für die Berechnung von A wird der Drehpunkt in B angenommen; es entsteht ein zweiseitiger Hebel.

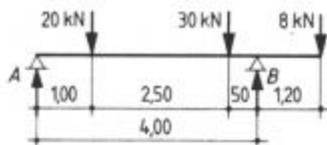


Bild 5.22
Träger mit Kragarm

Gleichgewicht herrscht, wenn die Summe der rechts drehenden und der links drehenden Momente gleich groß ist. Beide heben sich dann auf. Wir merken uns noch einmal die 3. Gleichgewichtsbedingung: $\Sigma M = 0$.

$$A \cdot 4,00 \text{ m} + 8 \text{ kN} \cdot 1,20 \text{ m} = 20 \text{ kN} \cdot 3,00 \text{ m} + 30 \text{ kN} \cdot 0,50 \text{ m}$$

$$A = \frac{20 \text{ kN} \cdot 3,00 \text{ m} + 30 \text{ kN} \cdot 0,50 \text{ m} - 8 \text{ kN} \cdot 1,20 \text{ m}}{4,00 \text{ m}}$$

$$A = \frac{60 \text{ kNm} + 15 \text{ kNm} - 9,60 \text{ kNm}}{4,00 \text{ m}} = \frac{65,40 \text{ kNm}}{4,00 \text{ m}} = \mathbf{16,35 \text{ kN}}$$

Für die Berechnung von B wird der Drehpunkt in A angenommen; es liegt ein einseitiger Hebel vor.

$$B \cdot 4,00 \text{ m} = 20 \text{ kN} \cdot 1,00 \text{ m} + 30 \text{ kN} \cdot 3,50 \text{ m} + 8 \text{ kN} \cdot (4,00 \text{ m} + 1,20 \text{ m})$$

$$B = \frac{20 \text{ kN} \cdot 1,00 \text{ m} + 30 \text{ kN} \cdot 3,50 \text{ m} + 8 \text{ kN} \cdot 5,20 \text{ m}}{4,00 \text{ m}}$$

$$B = \frac{20 \text{ kNm} + 105 \text{ kNm} + 41,60 \text{ kNm}}{4,00 \text{ m}} = \frac{166,60 \text{ kNm}}{4,00 \text{ m}} = \mathbf{41,65 \text{ kN}}$$

$$\text{Probe: } \Sigma V = 0 \quad A + B = 16,35 \text{ kN} + 41,65 \text{ kN} = 58 \text{ kN}$$

$$\Sigma F = 20 \text{ kN} + 30 \text{ kN} + 8 \text{ kN} = 58 \text{ kN}$$

Stets hat die Belastung eines Kragarms zur Folge, dass das am anderen Ende liegende Auflager (hier A) entlastet wird (Bild 5.22). Große Kragmomente können dort abhebende Kräfte hervorrufen (negative Auflagerkraft), so dass in A Verankerungen nötig werden. Die Entlastung von A kommt bei der Berechnung von A darin zum Ausdruck, dass das Drehmoment der Kragarmbelastung mit negativem Vorzeichen eingesetzt wird. Weil $\Sigma V = 0$ ist, bedingt die Entlastung von A eine entsprechend größere Belastung von B , die sich durch das positive Vorzeichen des Drehmoments der Kragarmlasten bei der Berechnung von B äußert (vgl. die Größe der Auflagerkräfte in Beispiel 29).

Übung 31 Für die Träger mit Kragarm in Bild 5.23a bis c sind die Auflagerkräfte zu berechnen.

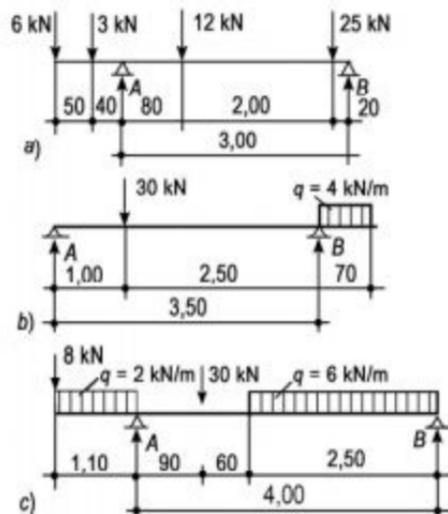


Bild 5.23 Träger auf zwei Stützen mit Kragarmen

Schnitt A–B

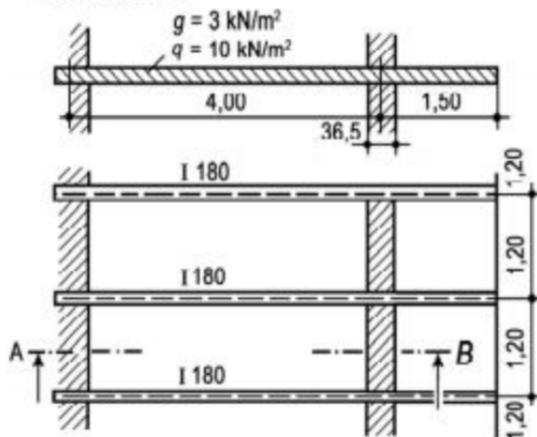


Bild 5.24 Stahlbetondecke zwischen I 180 mit Laderampe

Übung 32 Die Verkehrslast der Decke eines Lagerhauses beträgt 10 kN/m^2 (Bild 5.24). Hinzu kommt die Eigenlast der Decke einschließlich Bodenbelag von 3 kN/m^2 .

Berechnen Sie die Auflagerkräfte A und B der Träger bei Volllast mit dem neuen Sicherheitskonzept (Kapitel 2).