

8.5 Auflagerkräfte am Träger

8.5.1 Arten von Trägern und Auflagern

Bei Bauwerken sind Träger wichtige Bauteile zur Aufnahme von Kräften. Kräfte, die auf ein Bauteil wirken, werden auch als Lasten bezeichnet. Bei Trägern unterscheidet man mehrere Arten, z.B. den Einfeldträger, den Einfeldträger mit Kragarm und den Mehrfeldträger (**Bild 177/1**).



Bild 177/1: Arten von Trägern

Auflager können unterschiedlich ausgebildet sein. Man unterscheidet bewegliche Auflager und feste Auflager, die in Zeichnungen symbolisch dargestellt werden (**Bild 177/2**). Ein bewegliches Auflager kann Kräfte nur in vertikaler Richtung, ein festes Auflager Kräfte in vertikaler und horizontaler Richtung aufnehmen.

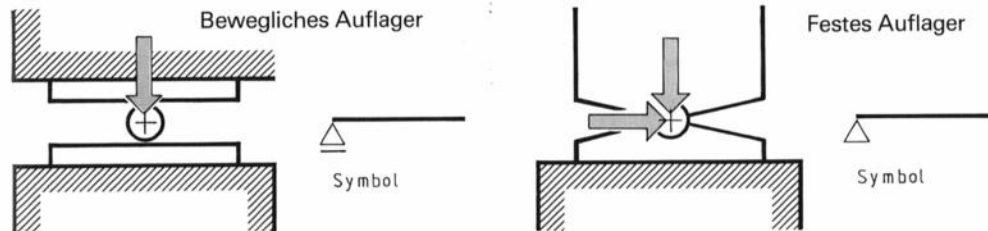


Bild 177/2: Arten von Auflagern

8.5.2 Gleichgewichtsbedingungen am Träger

Ein Träger muss sich in Ruhe befinden. Das bedeutet, dass die auf den Träger einwirkenden äußeren Kräfte, z.B. F_1 und F_2 , mit den Auflagerkräften F_A und F_B im Gleichgewicht stehen. Kräfte, die auf einen Träger einwirken, werden als Aktionskräfte, die Auflagerkräfte als Reaktionskräfte bezeichnet (**Bild 177/3**).

F_1, F_2 Aktionskräfte
 F_A, F_B Reaktionskräfte

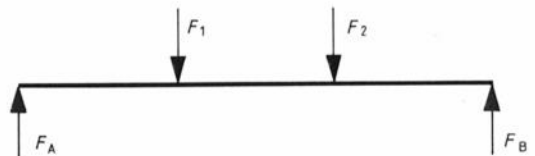


Bild 177/3: Äußere Kräfte und Auflagerkräfte

Vertikalkräfte F_V , die von unten nach oben wirken, z.B. F_A und F_B erhalten positive Vorzeichen. Vertikalkräfte F_V , die von oben nach unten wirken, z.B. F_1 , F_2 und F_3 erhalten negative Vorzeichen. Gleichgewicht herrscht, wenn die Summe aller Vertikalkräfte ΣF_V gleich Null ist (**Bild 177/4**).

Summe aller Vertikalkräfte ist Null

$$\Sigma F_V = 0$$

$$F_A + F_B - F_1 - F_2 - F_3 = 0$$

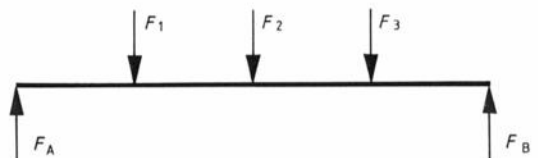


Bild 177/4: Gleichgewicht bei vertikalen Kräften

Soll an einem Träger Gleichgewicht herrschen, muss auch die Summe der horizontal wirkenden Kräfte ΣF_H gleich Null sein (**Bild 178/1**). Entgegengesetzt wirkende Kräfte erhalten unterschiedliche Vorzeichen.



Bild 178/1: Gleichgewicht bei horizontalen Kräften

Eine schräg auf den Träger wirkende Kraft F wird in die vertikale Teilkraft F_V und die horizontale Teilkraft F_H zerlegt. Gleichgewicht herrscht, wenn die Summe der vertikalen Kräfte ΣF_V und die Summe der horizontalen Kräfte ΣF_H gleich Null ist (**Bild 178/2**).

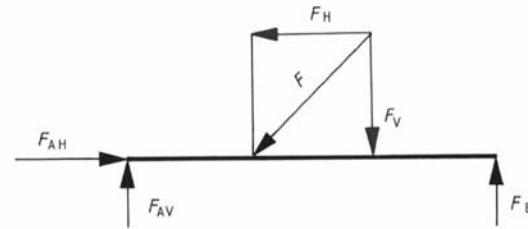


Bild 178/2: Gleichgewicht bei schräg wirkender Kraft

Damit am Träger Gleichgewicht herrscht, muss auch die Summe der Momente ΣM gleich Null sein. Recht drehende (im Uhrzeigersinn) wirkende Momente z.B. $F_2 \cdot l_2$ erhalten positive Vorzeichen, links drehend (gegen den Uhrzeigersinn) wirkende Momente z.B. $F_1 \cdot l_1$ erhalten negative Vorzeichen (**Bild 178/3**).

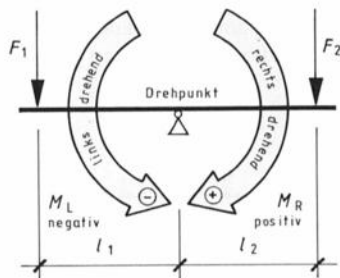


Bild 178/3: Gleichgewicht der Momente

Summe aller Horizontalkräfte ist Null

$$\Sigma F_H = 0$$

$$F_{AH} - F_H = 0$$

Summe aller Vertikalkräfte ist Null

$$\Sigma F_V = 0$$

$$F_{AV} + F_B - F_V = 0$$

Summe aller Horizontalkräfte ist Null

$$\Sigma F_H = 0$$

$$F_{AH} - F_H = 0$$

Summe der Momente ist Null

$$\Sigma M = 0$$

$$F_2 \cdot l_2 - F_1 \cdot l_1 = 0$$

Gleichgewichtsbedingungen beim Träger

Summe der horizontalen Kräfte muss Null sein	$\Sigma F_H = 0$
Summe der vertikalen Kräfte muss Null sein	$\Sigma F_V = 0$
Summe der Momente muss Null sein	$\Sigma M = 0$

8.5.3 Berechnung von Auflagerkräften am Träger

Die Belastung eines Trägers kann durch Einzellasten F , z.B. durch Stützen, oder durch gleichmäßig verteilte Lasten, z.B. durch Decken, erfolgen. Gleichmäßig verteilte Lasten bezeichnet man als Streckenlasten. Eine Streckenlast q wird in $\frac{\text{kN}}{\text{m}}$, ihre Länge c in m angegeben.

Streckenlasten werden für die Berechnung der Auflagerkräfte durch Einzellasten ersetzt. Die Einzellast, auch als Ersatzlast F_0 bezeichnet, ergibt sich aus dem Produkt der Streckenlast q und der Länge c der Streckenlast. Der Angriffspunkt der Ersatzlast wird in der Mitte der Länge c der Streckenlast angenommen (Schwerpunkt).

Auflagerkräfte werden berechnet, in dem man die äußeren Kräfte (Lasten), die auf den Träger wirken, mit den Auflagerkräften ins Gleichgewicht bringt.

Berechnung der Auflagerkraft F_A

Zur Berechnung der Auflagerkraft F_A stellt man sich den Träger als Hebel vor, dessen Drehpunkt im Auflager B liegt und ersetzt das Auflager A durch die Auflagerkraft F_A (**Bild 179/1**). Durch Anwendung der Gleichgewichtsbedingung erhält man die Größe der Auflagerkraft F_A .

Berechnung der Auflagerkraft F_B

Zur Berechnung der Auflagerkraft F_B stellt man sich den Drehpunkt im Auflager A vor und errechnet die Auflagerkraft F_B in gleicher Weise wie bei F_A (**Bild 179/2**).

Kontrollrechnung

Die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma F_V = 0$ kann zur Kontrolle der Ergebnisse benutzt werden.

Beispiel: Ein Träger wird durch die Einzellast $F_1 = 3 \text{ kN}$ belastet (**Bild 179/3**). Wie groß sind die Auflagerkräfte F_A und F_B ?

Lösung: Ermittlung der Auflagerkraft F_A

$$(\Sigma M)_B = 0$$

$$F_A \cdot 6,00 \text{ m} - 3 \text{ kN} \cdot 2,00 \text{ m} = 0$$

$$F_A = \frac{3 \text{ kN} \cdot 2,00 \text{ m}}{6,00 \text{ m}}$$

$$F_A = 1 \text{ kN}$$

Ermittlung der Auflagerkraft F_B

$$(\Sigma M)_A = 0$$

$$-F_B \cdot 6,00 \text{ m} + 3 \text{ kN} \cdot 4,00 \text{ m} = 0$$

$$F_B = \frac{3 \text{ kN} \cdot 4,00 \text{ m}}{6,00 \text{ m}}$$

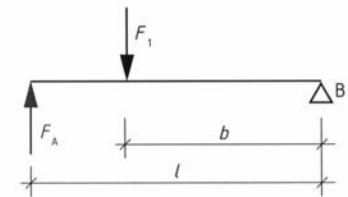
$$F_B = 2 \text{ kN}$$

Kontrollrechnung

$$\Sigma F_V = 0$$

$$F_A + F_B - F_1 = 0$$

$$1 \text{ kN} + 2 \text{ kN} - 3 \text{ kN} = 0$$

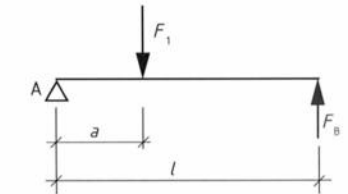


$$(\Sigma M)_B = 0$$

$$F_A \cdot l - F_1 \cdot b = 0$$

$$F_A = \frac{F_1 \cdot b}{l}$$

Bild 179/1: Berechnung der Auflagerkraft F_A



$$(\Sigma M)_A = 0$$

$$-F_B \cdot l + F_1 \cdot a = 0$$

$$F_B = \frac{F_1 \cdot a}{l}$$

Bild 179/2: Berechnung der Auflagerkraft F_B

Kontrollrechnung

$$\Sigma F_V = 0$$

$$F_A + F_B - F_1 = 0$$

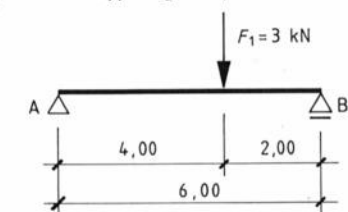
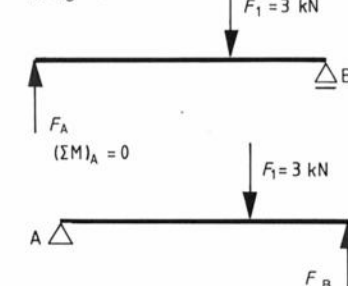


Bild 179/3: Träger mit Einzellast
($\Sigma M)_B = 0$)



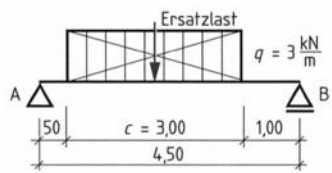
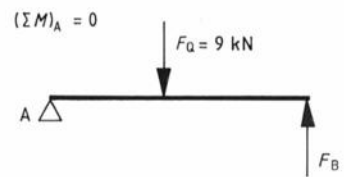
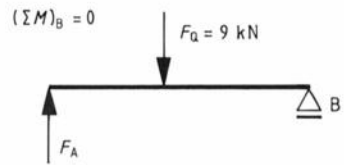
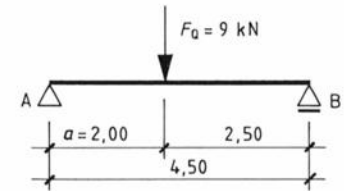


Bild 180/1: Träger mit Streckenlast



Beispiel: Ein Träger wird durch die Streckenlast q von $3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ belastet (Bild 180/1).

- Wie groß ist die Ersatzlast F_Q ?
- Wie groß ist der Abstand a zwischen der Ersatzlast F_Q und dem Auflager A?
- Wie groß sind die Auflagerkräfte F_A und F_B ?

Lösung: a) Ermittlung der Ersatzlast F_Q

$$F_Q = q \cdot c$$

$$F_Q = 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3,00 \text{ m}$$

$$F_Q = 9 \text{ kN}$$

b) Ermittlung des Abstandes a

$$a = 0,50 \text{ m} + \frac{c}{2}$$

$$a = 0,50 \text{ m} + 1,50 \text{ m}$$

$$a = 2,00 \text{ m}$$

c) Ermittlung der Auflagerkraft F_A

$$(\sum M)_B = 0$$

$$F_A \cdot 4,50 \text{ m} - 9 \text{ kN} \cdot 2,50 \text{ m} = 0$$

$$F_A = \frac{9 \text{ kN} \cdot 2,50 \text{ m}}{4,50 \text{ m}}$$

$$F_A = 5 \text{ kN}$$

Ermittlung der Auflagerkraft F_B

$$(\sum M)_A = 0$$

$$-F_B \cdot 4,50 \text{ m} + 9 \text{ kN} \cdot 2,00 \text{ m} = 0$$

$$F_B = \frac{9 \text{ kN} \cdot 2,00 \text{ m}}{4,50 \text{ m}}$$

$$F_B = 4 \text{ kN}$$

Kontrollrechnung

$$\sum F_V = 0$$

$$F_A + F_B - 9 \text{ kN} = 0$$

$$5 \text{ kN} + 4 \text{ kN} - 9 \text{ kN} = 0$$

Beispiel: Ein Träger mit Kragarm wird durch die Streckenlast q von $2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ und der Einzellast F von 10 kN belastet (Bild 180/2).

- Wie groß ist die Ersatzlast F_Q ?
- Wie groß ist der Abstand a zwischen der Ersatzlast F_Q und dem Auflager A?
- Wie groß sind die Auflagerkräfte F_A und F_B ?

Lösung: a) Ermittlung der Ersatzlast F_Q

$$F_Q = q \cdot c$$

$$F_Q = 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 4,00 \text{ m}$$

$$F_Q = 8 \text{ kN}$$

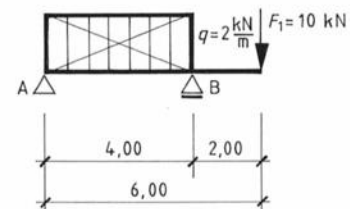


Bild 180/2: Träger mit Streckenlast und Einzellast

b) Ermittlung des Abstandes a

$$a = \frac{c}{2}$$

$$a = \frac{4,00 \text{ m}}{2}$$

$$a = 2,00 \text{ m}$$

c) Ermittlung der Auflagerkraft F_A

$$(\sum M)_B = 0$$

$$F_A \cdot 4,00 \text{ m} - 8 \text{ kN} \cdot 2,00 \text{ m} - 10 \text{ kN} \cdot 2,00 \text{ m} = 0$$

$$F_A = \frac{8 \text{ kN} \cdot 2,00 \text{ m} + 10 \text{ kN} \cdot 2,00 \text{ m}}{4,00 \text{ m}}$$

$$F_A = -1 \text{ kN}$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Auflagerkraft F_A von oben nach unten wirkt.

Ermittlung der Auflagerkraft F_B

$$(\sum M)_A = 0$$

$$10 \text{ kN} \cdot 6,00 \text{ m} - F_B \cdot 4,00 \text{ m} + 8 \text{ kN} \cdot 2,00 \text{ m} = 0$$

$$F_B = \frac{10 \text{ kN} \cdot 6,00 \text{ m} + 8 \text{ kN} \cdot 2,00 \text{ m}}{4,00 \text{ m}}$$

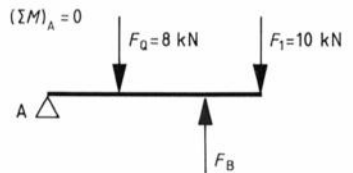
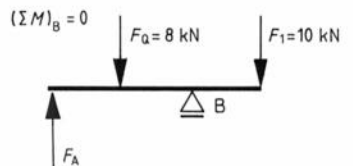
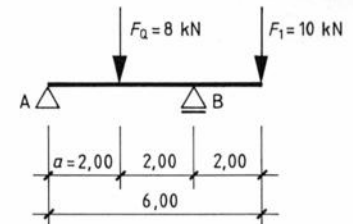
$$F_B = 19 \text{ kN}$$

Kontrollrechnung

$$\sum F_V = 0$$

$$-F_Q - F_1 + F_A + F_B = 0$$

$$-8 \text{ kN} - 10 \text{ kN} - 1 \text{ kN} + 19 \text{ kN} = 0$$



Beispiel: Ein Träger mit Kragarm wird durch die Streckenlasten q_1 und q_2 sowie durch die horizontale Last F belastet (Bild 181/1). Das Auflager A kann horizontale Lasten aufnehmen.

- Wie groß sind die Ersatzlasten F_{Q1} und F_{Q2} ?
- Wie groß sind die Abstände a_1 und a_2 zwischen dem Auflager A und den Ersatzlasten?
- Wie groß sind die Auflagerkräfte F_{AV} , F_B und F_{AH} ?

Lösung: a) Ermittlung der Ersatzlasten

$$F_{Q1} = q_1 \cdot c_1$$

$$F_{Q1} = 1,5 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 4,00 \text{ m}$$

$$F_{Q1} = 6 \text{ kN}$$

$$F_{Q2} = q_2 \cdot c_2$$

$$F_{Q2} = 5 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 2,00 \text{ m}$$

$$F_{Q2} = 10 \text{ kN}$$

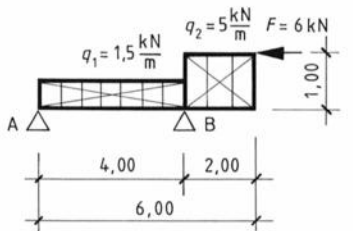


Bild 181/1: Träger mit zwei Streckenlasten und Einzellast

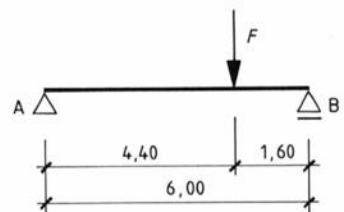
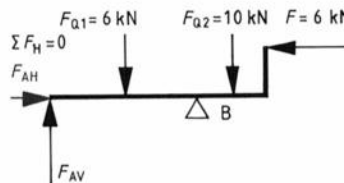
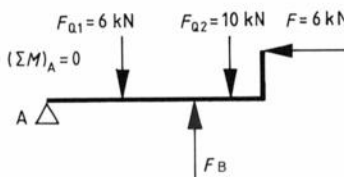
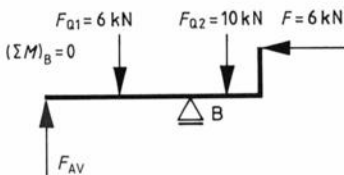
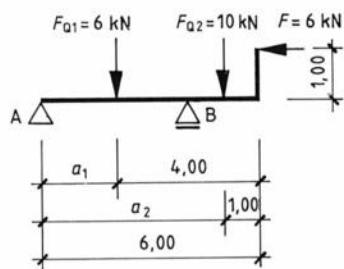


Bild 182/1: Träger mit Einzellast

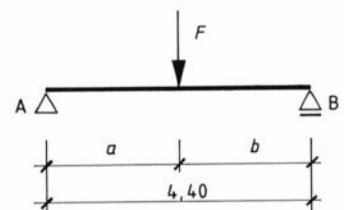


Bild 182/2: Träger mit Einzellast

b) Ermittlung der Abstände

$$a_1 = \frac{c_1}{2} \quad a_2 = c_1 + \frac{c_2}{2}$$

$$a_1 = \frac{4,00 \text{ m}}{2} \quad a_2 = 4,00 \text{ m} + \frac{2,00 \text{ m}}{2}$$

$$a_1 = 2,00 \text{ m} \quad a_2 = 5,00 \text{ m}$$

c) Ermittlung der Auflagerkraft F_{AV}

$$(\Sigma M)_B = 0$$

$$0 = F_{AV} \cdot 4,00 \text{ m} - 6 \text{ kN} \cdot 2,00 \text{ m} + 10 \text{ kN} \cdot 1,00 \text{ m} - 6 \text{ kN} \cdot 1,00 \text{ m}$$

$$F_{AV} = \frac{6 \text{ kN} \cdot 2,00 \text{ m} - 10 \text{ kN} \cdot 1,00 \text{ m} + 6 \text{ kN} \cdot 1,00 \text{ m}}{4,00 \text{ m}}$$

$$F_{AV} = 2 \text{ kN}$$

Ermittlung der Auflagerkraft F_B

$$(\Sigma M)_A = 0$$

$$0 = 6 \text{ kN} \cdot 2,00 \text{ m} - F_B \cdot 4,00 \text{ m} + 10 \text{ kN} \cdot 5,00 \text{ m} - 6 \text{ kN} \cdot 1,00 \text{ m}$$

$$F_B = \frac{6 \text{ kN} \cdot 2,00 \text{ m} + 10 \text{ kN} \cdot 5,00 \text{ m} - 6 \text{ kN} \cdot 1,00 \text{ m}}{4,00 \text{ m}}$$

$$F_B = 14 \text{ kN}$$

Kontrollrechnung

$$\Sigma F_V = 0$$

$$F_{AV} + F_B - F_{Q1} - F_{Q2} = 0$$

$$2 \text{ kN} + 14 \text{ kN} - 6 \text{ kN} - 10 \text{ kN} = 0$$

Ermittlung der Auflagerkraft F_{AH}

$$\Sigma F_H = 0$$

$$F_{AH} - 6 \text{ kN} = 0$$

$$F_{AH} = 6 \text{ kN}$$

Aufgaben zu 8.5 Auflagerkräfte am Träger

- Die Last F von 8,5 kN wirkt mittig auf einen 4,20 m langen Träger. Wie groß sind die Auflagerkräfte F_A und F_B ?
- Ein Träger auf zwei Stützen wird durch die Einzellast F von 15 kN (22 kN) belastet (Bild 182/1).
 - Wie groß sind die Auflagerkräfte F_A und F_B ? Das Ergebnis ist durch Kontrollrechnung zu prüfen.
 - Wie groß kann die Einzellast F höchstens sein, wenn diese die Auflagerkraft F_A 16,50 kN nicht überschreiten soll?
- Auf einen 4,40 m langen Träger wirkt die Last F von 5 kN (Bild 182/2). Wie groß sind die Auflagerkräfte F_A und F_B ?

a) $a = 2,20 \text{ m}$	b) $a = 2,20 \text{ m}$	e) $a = 1,38 \text{ m}$	b) $b = 3,02 \text{ m}$
b) $a = 2,15 \text{ m}$	b) $b = 2,25 \text{ m}$	f) $a = 2,32 \text{ m}$	b) $b = 2,08 \text{ m}$
c) $a = 2,85 \text{ m}$	b) $b = 1,55 \text{ m}$	g) $a = 0,80 \text{ m}$	b) $b = 3,60 \text{ m}$
d) $a = 2,40 \text{ m}$	b) $b = 2,00 \text{ m}$	h) $a = 2,65 \text{ m}$	b) $b = 1,75 \text{ m}$

- Ein Träger wird durch zwei Einzellasten F_1 und F_2 belastet (Bild 183/1). Wie groß sind die Auflagerkräfte F_A und F_B ?

- | | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| a) $a = 1,50 \text{ m}$ | b) $a = 1,75 \text{ m}$ | c) $a = 1,75 \text{ m}$ | b) $b = 2,55 \text{ m}$ |
| b) $a = 1,20 \text{ m}$ | b) $b = 3,30 \text{ m}$ | d) $a = 1,30 \text{ m}$ | b) $b = 3,20 \text{ m}$ |

- Die drei Einzellasten F_1 , F_2 und F_3 belasten einen Träger (Bild 183/2). Wie groß sind die Auflagerkräfte F_A und F_B ?

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
F_1	2,5 kN	3,5 kN	4,2 kN	1,9 kN	8,6 kN	5,0 kN
F_2	11,0 kN	4,8 kN	6,2 kN	2,3 kN	4,9 kN	7,6 kN
F_3	4,0 kN	12,1 kN	9,7 kN	10,8 kN	12,0 kN	15,1 kN

- Ein Träger wird durch vier Einzellasten F_1 , F_2 , F_3 und F_4 belastet (Bild 183/3). Wie groß sind die Auflagerkräfte F_A und F_B ?

- Ein Träger wird durch die Lasten F_1 und F_2 belastet (Bild 183/4). Die Kraft F_A am Auflager A beträgt 4 kN und die Kraft F_B am Auflager B 3,7 kN. Wie groß ist der Abstand a zwischen der Last F_1 und dem Auflager A?

- Auf einen Träger wirkt die Streckenlast q von $2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ($3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$) (Bild 183/5).

- Wie groß ist die Ersatzlast F_Q ?
- Wie groß ist der Abstand a zwischen der Ersatzlast F_Q und dem Auflager A?
- Wie groß sind die Auflagerkräfte F_A und F_B ?

- Ein Träger wird durch die Streckenlasten q_1 von $8 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ und $q_2 = 6 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ($4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$) belastet (Bild 183/6). Wie groß sind die Auflagerkräfte bei A und B?

- Die Streckenlasten q_1 , q_2 und q_3 wirken auf einen Träger (Bild 183/7). Wie groß sind die Auflagerkräfte F_A und F_B ?

	a)	b)	c)	d)	e)
q_1	4,0 kN/m	6,8 kN/m	5,2 kN/m	8,9 kN/m	4,5 kN/m
q_2	2,5 kN/m	4,7 kN/m	3,6 kN/m	5,4 kN/m	7,2 kN/m
q_3	5,5 kN/m	7,5 kN/m	2,8 kN/m	3,8 kN/m	8,5 kN/m

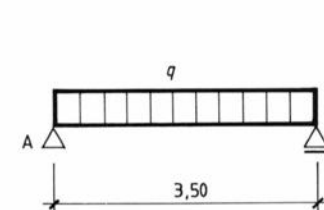


Bild 183/5: Träger mit Streckenlast

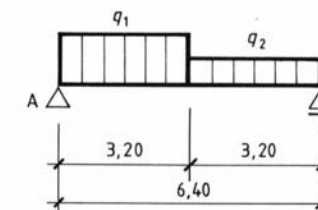


Bild 183/6: Träger mit zwei Streckenlasten

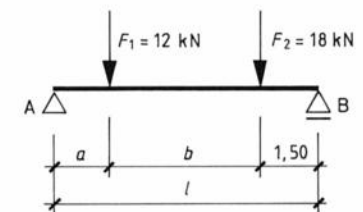


Bild 183/1: Träger mit zwei Einzellasten

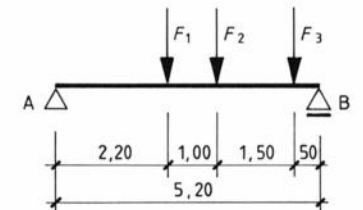


Bild 183/2: Träger mit drei Einzellasten

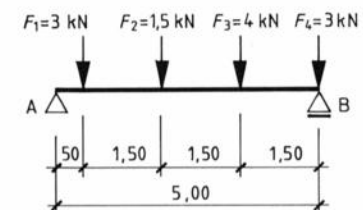


Bild 183/3: Träger mit vier Einzellasten

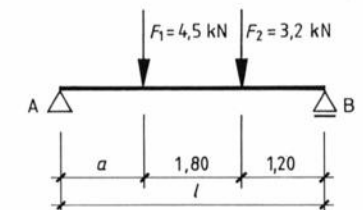


Bild 183/4: Träger mit zwei Einzellasten

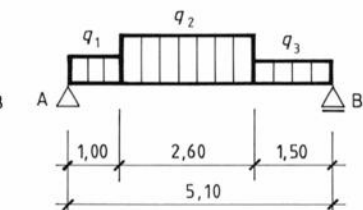


Bild 183/7: Träger mit drei Streckenlasten

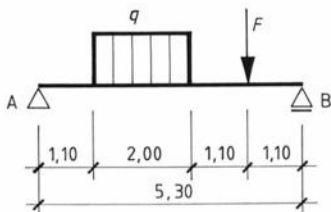


Bild 184/1: Träger mit Einzel- und Streckenlast

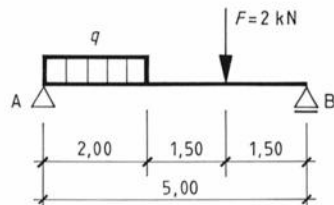


Bild 184/2: Träger mit Einzel- und Streckenlast

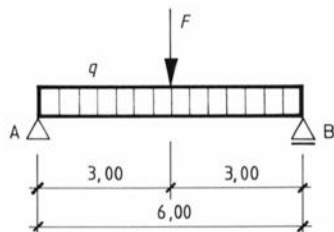


Bild 184/3: Träger mit Einzel- und Streckenlast

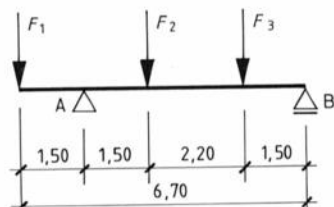


Bild 184/4: Träger mit Kragarm und 3 Einzellasten

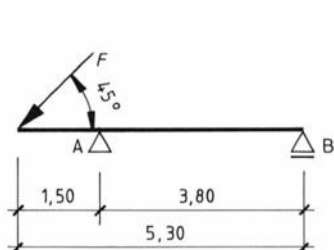


Bild 184/5: Kragträger mit schräg angreifender Einzellast

- 11 Die Einzellast F und die Streckenlast q belasten einen Träger (**Bild 184/1**). Welche Kräfte treten bei den Auflagern A und B auf?

	a)	b)	c)	d)	e)
q	4,0 kN/m	2,5 kN/m	6,0 kN/m	5,5 kN/m	8,0 kN/m
F	12,0 kN	8,0 kN	12,0 kN	10,4 kN	15,0 kN

- 12 Ein Träger wird durch die Streckenlast q und die Einzellast F belastet (**Bild 184/2**). Wie groß darf die Streckenlast q höchstens werden, wenn die Kraft $F_A = 6$ kN nicht überschritten werden darf?

- 13 Ein Träger wird durch die Streckenlast q von $3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ($2,5 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$) und die Einzellast F belastet (**Bild 184/3**). Wie groß ist die Einzellast F_1 , wenn die Auflager A und B jeweils durch 10,5 kN belastet werden?

- 14 Die drei Einzelkräfte F_1 , F_2 und F_3 wirken auf einen Träger mit Kragarm (**Bild 184/4**). Wie groß sind die Kräfte bei den Auflagern A und B?

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
F_1	2,0 kN	4,5 kN	3,5 kN	12,0 kN	7,5 kN	9,8 kN
F_2	8,6 kN	11,0 kN	4,5 kN	9,0 kN	12,0 kN	15,0 kN
F_3	5,5 kN	6,5 kN	4,8 kN	11,2 kN	7,6 kN	13,3 kN

- 15 Ein Träger mit Kragarm wird durch die Einzellast F von 8 kN (12 kN) mit schrägem Lastangriff belastet (**Bild 184/5**). Das Auflager A kann horizontale und vertikale Lasten, das Auflager B nur vertikale Lasten aufnehmen. Wie groß sind die Auflagerkräfte F_{AH} , F_{AV} und F_B ?

- 16 Ein Träger mit Kragarm wird durch die Streckenlast q von $3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ($4,8 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$) und die Einzellasten F_1 und F_2 belastet (**Bild 184/6**). Wie groß sind die Auflagerkräfte F_A und F_B ?

- 17 Die beiden Einzellasten F_1 und F_2 sowie die beiden Streckenlasten q_1 und q_2 wirken auf einen Träger mit beidseitigem Kragarm (**Bild 184/7**). Wie groß sind die Auflagerkräfte F_A und F_B ?

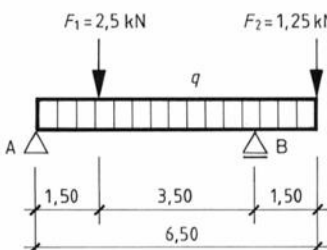


Bild 184/6: Kragträger mit Streckenlast und 2 Einzellasten

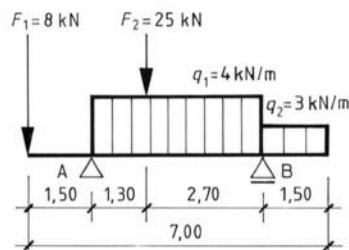


Bild 184/7: Kragträger mit 2 Strecken- und 2 Einzellasten